実戦演習

高３ 数学ＩＡ 第3回

Mathematics 数学

第1問 （配点　30）

〔1〕 実数 x は，$x^2+\frac{1}{x^2}=3$ と $-1<x<0$ を満たしているとする。

(1) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\boxed{\text{ア}}$

である。

$-1<x<0$ を考慮すると

$$x-\frac{1}{x}=\boxed{\text{イ}}$$

であり

$$x=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ -2	① -1	② 1	③ 2

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $-2+\sqrt{2}$	① $1-\sqrt{2}$	② $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$	③ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

（数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。）

(2) $m < |10x| < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $|10x|$ の小数部分を y とすると

$$y^2 + 22y = \boxed{\text{オ}}$$

である。

(数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。)

〔2〕

(1) △ABC において，AB＝14，BC＝15，CA＝13 とする。また，△ABC の内接円の中心を I とする。

$$\cos\angle BAC = \boxed{\text{カ}},\quad \sin\angle BAC = \boxed{\text{キ}}$$

であるから，△ABC の面積は $\boxed{\text{クケ}}$ であり，円 I の半径は $\boxed{\text{コ}}$ である。

次に，円 I と 3 辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ D，E，F とし，AD＝AF＝x とおくと

$$BE = BD = \boxed{\text{サ}},\quad CE = CF = \boxed{\text{シ}}$$

であるから，$x = \boxed{\text{ス}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第1問は次ページに続く。）

$\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $-\dfrac{5}{13}$	① $\dfrac{5}{13}$	② $-\dfrac{12}{13}$	③ $\dfrac{12}{13}$

$\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

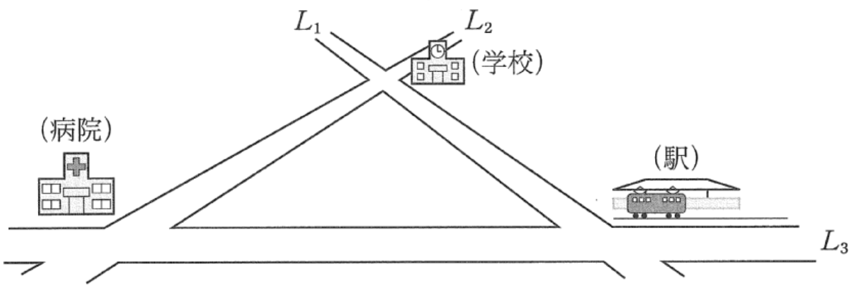
⓪ $13-x$	① $13+x$	② $14-x$
③ $14+x$	④ $15-x$	⑤ $15+x$

(数学I・数学A第1問は次ページに続く。)

(2)　太郎さんが住む街にはまっすぐに走る 3 本の幹線道路 L_1，L_2，L_3 があり

L_1 と L_2 の交差点のところには学校
L_2 と L_3 の交差点のところには病院
L_3 と L_1 の交差点のところには駅

がある。



3 本の幹線道路を直線とみなし，L_1 と L_2，L_2 と L_3，L_3 と L_1 の交点をそれぞれ A，B，C とする。このとき

2 点 A，B 間の距離は 1.4 km
2 点 B，C 間の距離は 1.5 km
2 点 C，A 間の距離は 1.3 km

である。

以下，学校，病院，駅はそれぞれ点 A，B，C の位置にあるとし，太郎さんの家も点とみなす。また，太郎さんの歩く速さは分速 80 m とする。

(数学Ⅰ・数学A第 1 問は次ページに続く。)

太郎さんの家は3本の幹線道路 L_1，L_2，L_3 で囲まれた三角形の部分にあり，L_1，L_2，L_3 までの距離がすべて等しいとする。ただし，太郎さんの家から幹線道路までの距離とは，太郎さんの家を表す点から幹線道路を表す直線に下ろした垂線の長さとする。

このとき，学校，病院，駅のうち，太郎さんの家からの距離が最も短いのは $\boxed{\text{セ}}$ である。また，太郎さんが自宅から $\boxed{\text{セ}}$ に向かってまっすぐに歩くことができるとすると，その所要時間はおよそ $\boxed{\text{ソ}}$ 分である。ただし，$\sqrt{13}=3.6056$ とする。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 学校	① 病院	② 駅

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 8	① 9	② 10	③ 11	④ 12

第２問 （配点　30）

〔１〕 太郎さんと花子さんが所属している数学部では，文化祭でたい焼き屋を出店することになった。過去の文化祭において，たい焼き屋が出店された直近３回におけるたい焼き１個あたりの価格と売り上げ個数の販売実績について先生に聞いたところ，表１のようであった。これをもとに，二人はたい焼き１個あたりの価格について考えることにした。

表１　過去の文化祭におけるたい焼き１個あたりの価格と実際の売り上げ個数

１個あたりの価格(円)	150	180	200
売り上げ個数(個)	341	278	243

花子：たい焼き１個あたりの価格を x 円，売り上げ個数を y 個として，過去の販売実績を点として座標平面上にとってみたよ(図１)。

太郎：白丸の点だね。売り上げ個数の一の位を四捨五入して

表２

１個あたりの価格(円)	150	180	200
売り上げ個数(個)	340	280	240

とすると，黒丸の点になってきれいに一直線上に並ぶね。

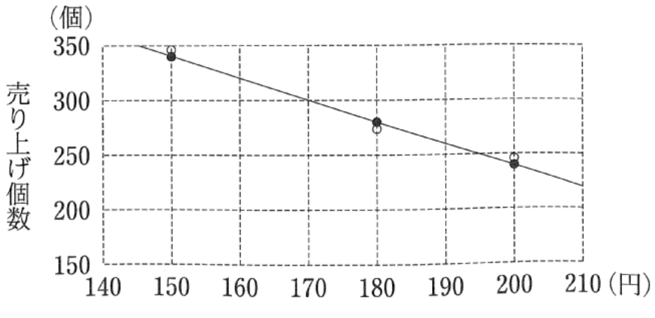


図１　たい焼き１個あたりの価格

(数学Ⅰ・数学Ａ第２問は次ページに続く。)

y が x の１次関数であると仮定し，太郎さんの発言にある表２を用いると

$$y = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。

以下，x と y にはこの関係が成り立つとする。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $-x+440$	① $-x+490$
② $-2x+600$	③ $-2x+640$
④ $-3x+790$	⑤ $-3x+880$

$y \geqq 0$ を満たす整数 x の最大値は $\boxed{\text{イウエ}}$ である。

売り上げ金額を z 円とすると $z = xy$ である。x が１以上 $\boxed{\text{イウエ}}$ 未満の整数値をとるとすると，売り上げ金額が最大となるとき

たい焼き１個あたりの価格は $\boxed{\text{オカキ}}$ 円，売り上げ金額は $\boxed{\text{ク}}$ 円

である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 44000	① 48000	② 50400	③ 51000	④ 51200

（数学Ⅰ・数学Ａ第２問は次ページに続く。）

太郎さんと花子さんはたい焼き1個あたりの価格を150円以上200円以下として，予想される利益について考えた。

利益は売り上げ金額から費用を引いた金額とする。費用には固定費用と可変費用があり，これらの和が費用となる。

固定費用は，調理器具一式のレンタル料および部員全員分のたい焼きロゴマーク入りTシャツ代の合計35700円であった。

また，可変費用は材料費である。材料についてはちょうど売り上げ個数の分だけ仕入れるとし，たい焼き1個あたり k 円かかるとする。ただし，k は20以上80以下の整数とする。

(1) 太郎さんと花子さんは利益の最大値について考えた。

太郎：利益を最大にするためには，どうすればよいのかな？
花子：まず，たい焼き1個あたりの材料費が最小の場合を考えてみよう。

$k=20$ とする。x が $150 \leqq x \leqq 200$ の範囲の整数値を変化するとき，利益が最大となるのは，たい焼き1個あたりの価格を $\boxed{\text{ケコサ}}$ 円としたときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{シ}}$ 円である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ 7500	① 7900	② 8500	③ 9300	④ 10300

（数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。）

(2) 太郎さんと花子さんは，利益がつねに正となるようなたい焼き1個あたりの材料費の最大値について考えた。

$150 \leqq x \leqq 200$ における利益の最小値を m 円とすると

$20 \leqq k \leqq$ $\boxed{\text{スセ}}$ のとき　$m =$ $\boxed{\text{ソ}}$

$\boxed{\text{スセ}}$ $\leqq k \leqq 80$ のとき　$m =$ $\boxed{\text{タ}}$

であり，x が $150 \leqq x \leqq 200$ の範囲の整数値を変化するとき，利益がつねに正となるような整数 k の最大値は $\boxed{\text{チツ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $-240k+12300$	① $-240k+14800$
② $-290k+12550$	③ $-290k+15050$
④ $-340k+15300$	⑤ $-340k+17800$

〔2〕

(1) 気象庁は沖縄地方の梅雨入り日と梅雨明け日を発表している。

気象庁が発表している日付は普通の月日形式であるが，この問題では該当する年の1月1日を「1」とし，12月31日を「365」(うるう年の場合は「366」)とする「年間通し日」に変更している。例えば，2月25日は，1月31日の「31」に2月25日の「25」を加えた「56」となる。

図1は1973年から2022年までの50年間の沖縄地方の「梅雨入り日」(横軸)と「梅雨明け日」(縦軸)の散布図である。なお，散布図には補助的に切片が20，30，40，50，60である傾き1の直線を5本付加している。

また，以下では，梅雨明け日から梅雨入り日を引いたものを「梅雨の期間」と呼ぶことにする。

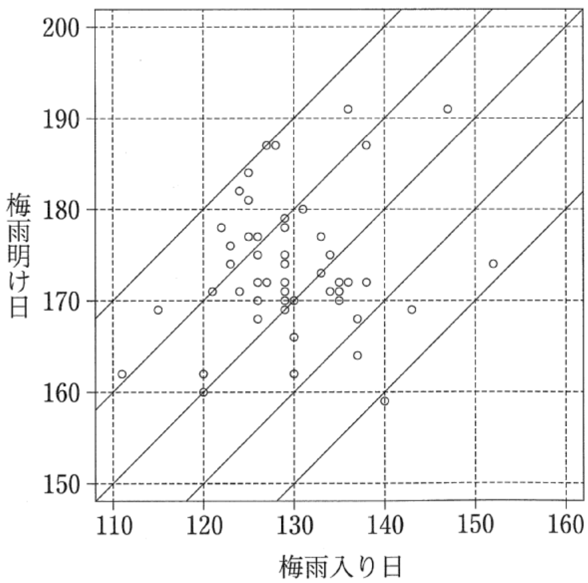


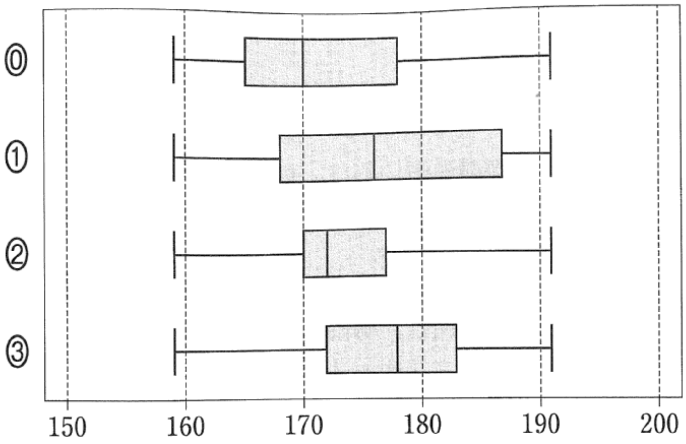
図1　梅雨入り日と梅雨明け日の散布図

(出典：気象庁のWebページにより作成)

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

(i) 梅雨明け日に対応する箱ひげ図は $\boxed{\text{チ}}$ である。

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。



外れ値を，

「(第 1 四分位数) $-1.5\times$ (四分位範囲)」以下のすべての値

「(第 3 四分位数) $+1.5\times$ (四分位範囲)」以上のすべての値

とする。

外れ値が存在する箱ひげ図は上の⓪～③のうちの $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(数学 I ・数学 A 第 2 問は次ページに続く。)

(ii) 次の⓪～④のうち，図1から読み取れることとして正しいものは $\boxed{テ}$ と $\boxed{ト}$ である。

$\boxed{テ}$，$\boxed{ト}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ 梅雨の期間が最も長い年は，梅雨明け日が最も遅い年である。
① 梅雨の期間が最も短い年は，梅雨明け日が最も早い年である。
② 梅雨入り日の中央値と梅雨明け日の中央値の差の絶対値は，50より大きい。
③ 梅雨入り日の範囲は，梅雨明け日の範囲より小さい。
④ 梅雨入り日の四分位範囲は，梅雨明け日の四分位範囲より大きい。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

(2) 沖縄県の県庁所在地である那覇市の，1993 年から 2022 年までの 30 年間における，概ね梅雨の期間に相当する 5 月と 6 月の 2 か月間の降水量についても調べた。

沖縄地方の梅雨の期間を変量 U，那覇市の 5 月と 6 月の 2 か月間の降水量を変量 V とし，変量 W を $W=\dfrac{V}{U}$ で定める。

図 2 は U (横軸)と V (縦軸)の散布図である。なお，散布図には補助的に原点を通り，傾きが 10，20 である直線を 2 本付加している。

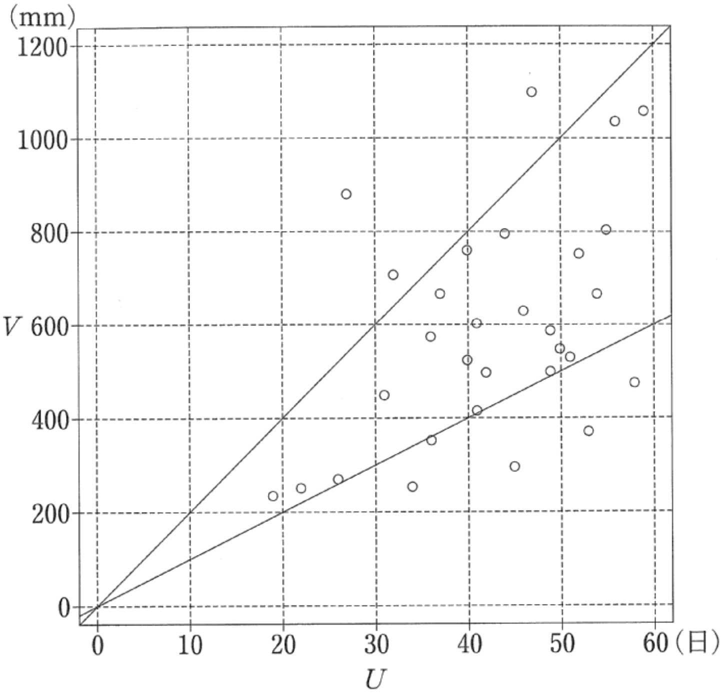


図 2　U と V の散布図

(出典：気象庁の Web ページにより作成)

(数学Ⅰ・数学A第 2 問は次ページに続く。)

(i) 次の⓪～④のうち，図 2 から読み取れることとして正しいものは $\boxed{\text{ナ}}$ と $\boxed{\text{ニ}}$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ W の値が最小の年は，V の値が最小の年である。
① W の値が最大の年は，V の値が最大の年である。
② W の値が 10 以上 20 未満の年の数は，20 より多い。
③ U と V の積が最大の年は，V の値が最大の年である。
④ U と V の積が最小の年は，U の値が最小の年である。

(数学Ⅰ・数学A第 2 問は次ページに続く。)

(ii) 次の表1は，U と V についての値をまとめたものである。ただし，U と V の共分散は，U の偏差と V の偏差の積の平均値である。また，いずれの値も小数第2位を四捨五入している。

表1　平均値，標準偏差，共分散および相関係数

	平均値	標準偏差	共分散	相関係数
U	42.4	S	1195.1	0.5
V	586.0	235.5		

n を正の整数とする。実数値のデータ u_1，u_2，…，u_n に対して，平均値 $\overline{u}$ を

$$\overline{u}=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

とおくと，分散 ${s_u}^2$ は

$${s_u}^2=\frac{1}{n}({u_1}^2+{u_2}^2+\cdots+{u_n}^2)-(\overline{u})^2$$

で計算できることが知られている。

U の標準偏差 S は $\boxed{ヌ}$ であり，U^2 の平均値は $\boxed{ネ}$ である。

$\boxed{ヌ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 7.4	① 8.3	② 9.2	③ 10.1

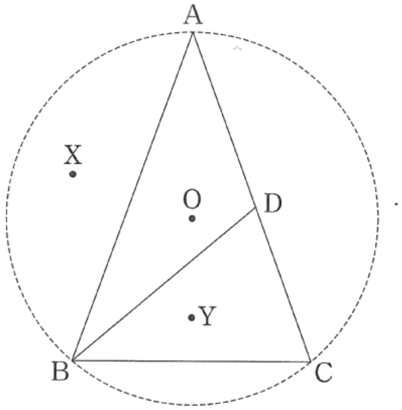
$\boxed{ネ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 1776.4	① 1899.8	② 2023.2	③ 2146.6

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

第3問 （配点　20）

AB＝AC かつ AB＞BC である二等辺三角形 ABC がある。辺 AC 上に点 C と異なる点 D を，BC＝BD となるようにとる。ただし，AD≒BD であるとする。また，△ABC の外心を O，△ABD の外心を X，△BCD の外心を Y とする。



(1)　点 Y と円 X の位置関係について考えよう。

円 O に着目すると，∠AOB＝ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，円 Y に着目すると，

$\boxed{\text{ア}}$ ＝ $\boxed{\text{イ}}$ である。

よって，$\boxed{\text{イ}}$ ＋ $\boxed{\text{ウ}}$ ＝180° であるから，点 Y は円 X の周上にあるとわかる。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ $\angle ADB$	① $\angle AYB$	② $2\angle ACB$	③ $2\angle ABD$

$\boxed{イ}$ の解答群

⓪ $\angle CYD$	① $\angle BYD$	② $2\angle DCY$	③ $2\angle CBD$

$\boxed{ウ}$ の解答群

⓪ $\angle ACB$	① $\angle ABD$	② $\angle BOD$	③ $\angle BAD$

(数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。)

(2) 直線OXと直線CYが平行であることを示そう。このことは，次の**構想**に基づいて，後のように説明できる。

構想

Oは△ABCの外心であるから，Oは辺ABの垂直二等分線上にある。また，Xは△ABDの外心であるから，Xも辺ABの垂直二等分線上にある。よって，直線OXは辺ABと垂直に交わる。

したがって，直線OXと直線CYが平行であることを証明するためには，直線CYが辺ABと垂直に交わることを示せばよい。

直線CYと辺ABとの交点をE，直線BYと辺ACとの交点をFとする。△BCDがBC＝BDの二等辺三角形であることから，∠BFC＝$\boxed{\text{エオ}}$°である。さらに，△ABC，△YBCがそれぞれAB＝AC，YB＝YCの二等辺三角形であることから，∠EBC＝$\boxed{\text{カ}}$，∠ECB＝$\boxed{\text{キ}}$である。

したがって，△EBC≡$\boxed{\text{ク}}$であるから，∠CEB＝$\boxed{\text{エオ}}$°であり，直線CYは辺ABと垂直に交わる。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ ∠FBC	① ∠FCB	② ∠FYD	③ ∠BDE

$\boxed{\text{ク}}$の解答群

⓪ △BCD	① △FCE	② △FCB	③ △BYC

(数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。)

(3) △ABC において，AB＝AC＝10，CD＝4 であり，円 Y の半径が $\dfrac{10}{3}$ であるとする。また，円 X と直線 CY との交点のうち，Y と異なるものを Z とし，円 X 上に動点 P をとる。

このとき

$$\mathrm{YZ}=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり，△PYZ の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}\left(\boxed{\text{セ}}+\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}\right)}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

第4問 （配点　20）

n を 2 以上の整数とする。縦が 2 行，横が n 列の表の $2n$ 個のマスに 1 から $2n$ までの整数を重複することなく一つずつ入れたものを $T(n)$ と呼ぶことにする。

例えば，次の表は $T(3)$ の一例である。

2	6	3
4	1	5

さらに，$T(n)$ のうち，次の二つの規則に従うものを「増加表」と呼ぶことにする。

（規則 1 ）　横に並んでいる二つのマスの数においては右のマスの数の方が大きい。

（規則 2 ）　縦に並んでいる二つのマスの数においては下のマスの数の方が大きい。

例えば，次の表(＊)が増加表であるための条件は

$$a_1 < a_2 < a_3 \quad \text{かつ} \quad b_1 < b_2 < b_3$$

$$\text{かつ} \quad a_1 < b_1 \qquad \text{かつ} \quad a_2 < b_2 \qquad \text{かつ} \quad a_3 < b_3$$

である。

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3

…………………………… (＊)

(1)　$T(2)$ は全部で 24 通りである。

24 通りの $T(2)$ のうち，増加表であるものは全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。

（数学Ⅰ・数学A第 4 問は次ページに続く。）

(2) $T(3)$ は全部で $\boxed{\text{イウエ}}$ 通りである。

$\boxed{\text{イウエ}}$ 通りの $T(3)$ のうち，増加表であるものは，前出の表(*)において

$$(a_1,\ b_3) = \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

であること，および b_1 の値に注意して数えると，全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りである。

(3) $T(4)$ のうち，増加表であるものについて

1			
2			

であるものは $\boxed{\text{ク}}$ 通り

1			
4			

であるものは $\boxed{\text{ケ}}$ 通り

である。

$T(4)$ のうち，増加表であるものは全部で $\boxed{\text{コサ}}$ 通りである。

(4) $T(5)$ のうち，増加表であるものは全部で $\boxed{\text{シス}}$ 通りである。

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	1	2	
	イ	2	1	
	ウ	3	2	
	エ	6	2	
	オ	4	3	
	カ	1	2	
	キ	3	2	
	クケ	84	2	
	コ	4	2	
	サ	2	2	
	シ	0	2	
	ス	6	2	
	セ	0	3	
	ソ	1	3	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア	3	2	
	イウエ	320	1	
	オカキ	160	2	
	ク	4	1	
	ケコサ	170	2	
	シ	3	1	
	スセ	30	2	
	ソ	0	1	
	タ	4	1	
	チツ	44	2	
	チ	2	2	
	ツ	2	1	
	テ，ト	1，4（解答の順序は問わない）	4（各2）	
	ナ，ニ	2，4（解答の順序は問わない）	4（各2）	
	ヌ	3	2	
	ネ	1	2	
第2問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	ア	2	2	
	イ	1	2	
	ウ	3	2	
	エオ	90	2	
	カ	1	2	
	キ	0	2	
	ク	2	2	
	$\frac{ケコ}{サ}$	$\frac{26}{3}$	3	
	$\frac{シス(セ+ソ\sqrt{タチ})}{ツ}$	$\frac{13(9+5\sqrt{10})}{9}$	3	
		第3問　自己採点小計	(20)	
第4問	ア	2	2	
	イウエ	720	3	
	オ，カ	1，6	2	
	キ	5	3	
	ク	5	2	
	ケ	3	2	
	コサ	14	2	
	シス	42	4	
		第4問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

<MEMO>

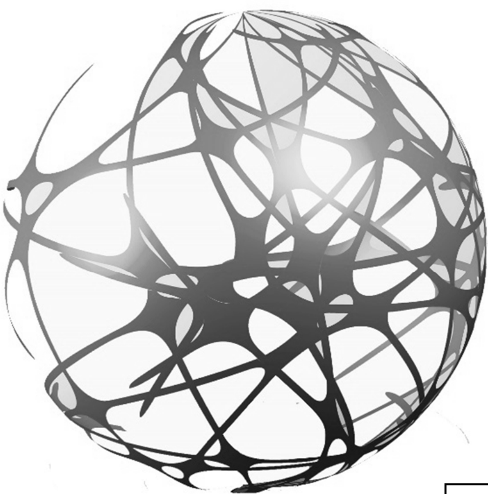
＜MEMO＞

Mathematics 数学

Forward 将来に

individual 個人

training 訓練



名　前