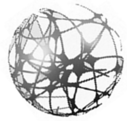
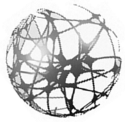
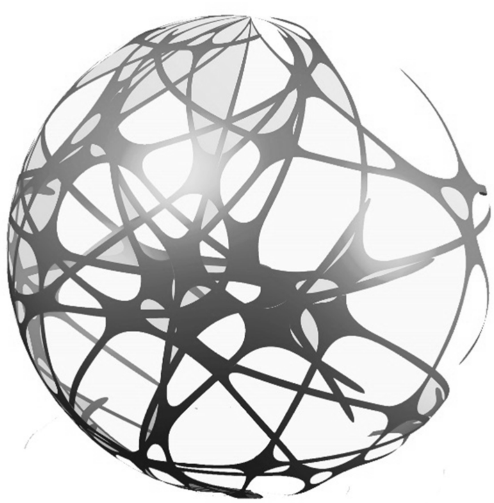
実戦演習

高３ 数学ⅡBC 第**2**回





Mathematics 数学



第1問 （必答問題） （配点　15）

(1)　$\cos\dfrac{\pi}{3} = \boxed{\text{ア}}$，$\sin\dfrac{\pi}{3} = \boxed{\text{イ}}$ であるから，三角関数の加法定理により

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}}\cos\theta - \boxed{\text{エ}}\sin\theta$$

である。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
③ $-\dfrac{1}{2}$	④ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　三角関数の合成により

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \boxed{\text{オ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

である。

(3)　O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta,\ \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$ をとる。

(1) と (2) より

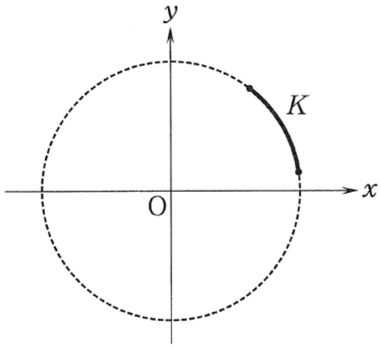
$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{キ}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right),\quad \boxed{\text{オ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right)\right)$$

と表せるから，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P の描く図形 K は $\boxed{\text{ケ}}$ の実線部分である。

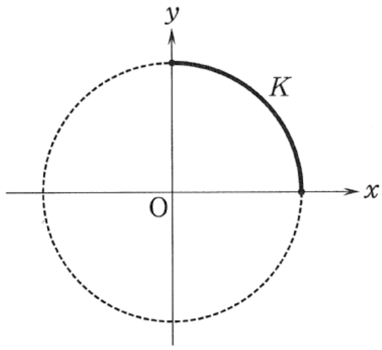
（数学Ⅱ，数学B，数学C 第1問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

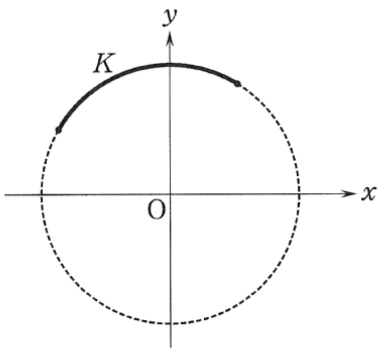
⓪



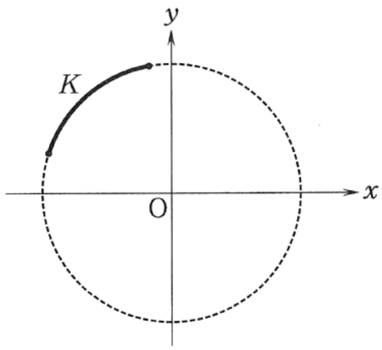
①



②



③



また，K と 2 直線 $x = \boxed{\text{キ}}\cos\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$，$x = \boxed{\text{キ}}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$

および x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$	① $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$	② $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$
③ $\pi + \sqrt{2}$	④ $\pi + \sqrt{3}$	⑤ $\pi + 2$

第２問　（必答問題）　（配点　15）

(1)　次の**問題**について考えよう。

> **問題**　$a=\dfrac{7}{3}$，$b=\log_2 6$，$c=\sqrt{5}$ とする。a，b，c の大小関係を調べよ。

$$a-b=\frac{1}{3}\left(\log_2 2^{\boxed{\text{ア}}}-\log_2 6^{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

なので，$2^{\boxed{\text{ア}}}$ と $6^{\boxed{\text{イ}}}$ の大小を比較することにより $a\ \boxed{\text{ウ}}\ b$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪　$<$	①　$=$	②　$>$

また，a，b，c の大小関係について $\boxed{\text{エ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪　$a<b<c$	①　$a<c<b$	②　$b<a<c$
③　$b<c<a$	④　$c<a<b$	⑤　$c<b<a$

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第２問は次ページに続く。）

(2) 2^n が 12 桁(けた)の整数であるような自然数 n の最小値を求めよう。

$$10^{\boxed{\text{オカ}}-1} \leqq 2^n < 10^{\boxed{\text{オカ}}}$$

なので，各辺の 10 を底とする対数をとると

$$\boxed{\text{オカ}}-1 \leqq n\log_{10}\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{オカ}}$$

である。ここで $\log_{10}2=0.3010$ であるとすると，求める自然数 n の最小値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

$2^{\boxed{\text{クケ}}}$ の一の位の数は $\boxed{\text{コ}}$ であり，$2^{\boxed{\text{クケ}}}+7$ は $\boxed{\text{サシ}}$ 桁の整数である。

第3問 (必答問題) (配点 22)

〔1〕 3次関数 $f(x)=x^3-3x^2-6$ を考える。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。

$f'(x)=$ $\boxed{\text{ア}}$ x^2- $\boxed{\text{イ}}$ x であるから，$f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で極大値をとり，$x=$ $\boxed{\text{エ}}$ で極小値をとる。

C 上の点 $(-1,\ f(-1))$ における C の接線を ℓ とすると ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\boxed{\text{カ}}$$

である。$g(x)=$ $\boxed{\text{オ}}$ $x-$ $\boxed{\text{カ}}$ とおく。

太郎さんと花子さんが C と ℓ の共有点の x 座標を求めることについて話している。

太郎：方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解を求めればいいんだね。
花子：C と ℓ は点 $(-1,\ f(-1))$ で接しているから，方程式 $f(x)=g(x)$ が $x=-1$ を重解にもつことから考えるといいね。

C と ℓ の共有点の x 座標は -1 と $\boxed{\text{キ}}$ である。

t を $-1<t<$ $\boxed{\text{キ}}$ を満たす実数とする。

直線 $x=t$ と曲線 C の交点をP，直線 $x=t$ と直線 ℓ の交点をQとする。線分PQの長さを $L(t)$ とすると，$L(t)=$ $\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

t が $-1<t<$ $\boxed{\text{キ}}$ の範囲を動くとき，$L(t)$ の最大値は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $f(t)+g(t)$ ① $f(t)-g(t)$ ② $g(t)-f(t)$ ③ $f(t)g(t)$

(数学Ⅱ，数学B，数学C 第3問は次ページに続く。)

〔2〕 正の実数kに対して $h(x)=-kx^2+k$ とし，座標平面上の曲線 $y=h(x)$ をDとする。

曲線Dとx軸の交点のうち，x座標が正である方をA，負である方をBとすると，点Aのx座標は $\boxed{\text{サ}}$ である。

点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{k}\right)$ をEとし，線分AEと線分BEおよび曲線Dで囲まれた図形の面積をSとする。

曲線Dとx軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}k$ であるから

$$S=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}k+\frac{\boxed{\text{セ}}}{k}$$

である。したがって，相加平均と相乗平均の関係から，kが $k>0$ の範囲を動くとき，Sは $k=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ をとることがわかる。

第4問 (選択問題) (配点 16)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 が 1，公差が d の等差数列であり，$a_4=10$ を満たすとする。

$a_4=1+$ $\boxed{\text{ア}}$ d であるから，$d=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{イ}}\, n - \boxed{\text{ウ}}$$

である。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=2^{n-1}$ であるとする。

数列 $\{a_n\}$ を，次のように群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{a_1} \;\Big|\; \underset{\text{第2群}}{a_2,\ a_3} \;\Big|\; \underset{\text{第3群}}{a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7} \;\Big|\; \cdots$$

ここで，第 k 群は b_k 個の項からなるものとし，第 k 群に含まれる項の総和を T_k で表す。

(1) 第4群の最後の項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $\boxed{\text{エオ}}$ 項であり，$a_{\boxed{\text{エオ}}} =$ $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(2) $a_m=55$ を満たす m は $\boxed{\text{クケ}}$ であり，$a_{\boxed{\text{クケ}}}$ は第 $\boxed{\text{コ}}$ 群に含まれる。

第 $\boxed{\text{コ}}$ 群の最初の項は $a_{\boxed{\text{サシ}}}$ であり，第 $\boxed{\text{コ}}$ 群に含まれる項の総和 $T_{\boxed{\text{コ}}}$ は $\boxed{\text{スセソタ}}$ である。

(数学Ⅱ，数学B，数学C 第4問は次ページに続く。)

(3) 花子さんと太郎さんは T_k を k の式で表すことについて話している。

花子：第 k 群に含まれる項の個数は b_k だね。

太郎：あとは，第 k 群の最初の項と最後の項を調べるといいね。

第 k 群に含まれる項の総和 T_k は

$$T_k = 2^{\boxed{チ}}\left(\boxed{ツ}\cdot 2^{\boxed{テ}} - \boxed{ト}\right)$$

である。

$\boxed{チ}$，$\boxed{テ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $k-2$	① $k-1$	② k	③ $k+1$	④ $k+2$

第5問 (選択問題) (配点 16)

袋の中に赤球2個と白球4個が入っている。この袋から，3個の球を同時に取り出し，それらの球の色を確認して袋に戻すという試行をTとする。Tを1回行ったとき，取り出した3個の球のうち赤球の個数を Y とする。

(1) $P(Y=0)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $P(Y=1)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$

であり，確率変数 Y の平均(期待値)は $\boxed{\text{オ}}$, Y の分散は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(数学Ⅱ，数学B，数学C 第5問は次ページに続く。)

(2) Tを1回行うごとに，$Y=0$ であれば3点を獲得し，$Y\neq0$ であれば1点を獲得するとする。

Tを繰り返し50回行ったとき，得点の合計を Z とする。このとき，50回のうち $Y=0$ となった回数を W とする。

確率変数 W は [ク] に従うので，W の平均は [ケコ]，W の分散は [サ] である。

$Z=$ [シ] $W+$ [スセ] であるから，確率変数 Z の平均は [ソタ]，Z の標準偏差は [チ] $\sqrt{\boxed{ツ}}$ である。

[ク] については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 正規分布 $N(0,\ 1)$	① 二項分布 $B(0,\ 1)$
② 正規分布 $N\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$	③ 二項分布 $B\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$
④ 正規分布 $N(10,\ 8)$	⑤ 二項分布 $B(10,\ 8)$

第6問 （選択問題） （配点 16）

平面上に三角形OABがある。辺OAを3:1に内分する点をC，辺ABの中点をM，線分OMの中点をNとする。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

であり

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OM}$$

$$=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{OB}$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第6問は次ページに続く。）

点Pが直線CN上にあるとする。実数kを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = k\overrightarrow{\mathrm{CN}}$$

と表すことができるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} - \frac{k}{\boxed{\text{サ}}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。

さらに，Pは直線OB上の点でもあるとすると，$k = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

直線CNと直線ABの交点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

である。

$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{3}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ とすると線分PQの長さは $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第７問 （選択問題）（配点　16）

複素数平面で，方程式

$$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$$

で与えられる曲線を C とする。この方程式は

$$(z-4)(\overline{z}-4)=\boxed{\text{ア}}$$

と変形できるので，C は点 $\boxed{\text{イ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円である。

C 上の点 z について，$|z|$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}}\leqq|z|\leqq\boxed{\text{オ}}$$

である。また，z の偏角を $\arg z$ $(-\pi<\arg z\leqq\pi)$ とすると，$\arg z$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi\leqq\arg z\leqq\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第７問は次ページに続く。）

(1) 複素数 v は，$v=(1+i)z$ を満たしている。点 z が C 上を動くとき，v の偏角 $\arg v$ $(-\pi<\arg v\leqq\pi)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi\leqq\arg v\leqq\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}\pi$$

である。

(2) 複素数 w は，$w=(1+i)^n z$ を満たしている。ただし，n は $1\leqq n\leqq 100$ を満たす整数である。点 z が C 上を動くとき，点 w が描く図形を D_n とする。D_n 上のすべての点の虚部が正となるような n は全部で $\boxed{\text{チツ}}$ 個ある。

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	0	1	
	イ	2	1	
	ウ，エ	0，2	2	
	オ	2	1	
	カ	3	2	
	キ，ク	2，3	2	
	ケ	2	3	
	コ	4	3	
		第1問　自己採点小計	(15)	
第2問	$2^{ア}$	2^7	1	
	$6^{イ}$	6^3	1	
	ウ	0	2	
	エ	4	3	
	オカ	12	1	
	キ	2	1	
	クケ	37	2	
	コ	2	2	
	サシ	12	2	
		第2問　自己採点小計	(15)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	ア，イ	3，6	1	
	ウ	0	1	
	エ	2	1	
	オ	9	1	
	カ	1	1	
	キ	5	2	
	ク	2	2	
	ケコ	32	3	
	サ	1	1	
	$\frac{シ}{ス}k$	$\frac{4}{3}k$	3	
	$\frac{セ}{k}$	$\frac{1}{k}$	2	
	$\frac{\sqrt{ソ}}{タ}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	
	$\frac{チ\sqrt{ツ}}{テ}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	2	
		第3問　自己採点小計	(22)	
第4問	ア	3	1	
	イ	3	1	
	ウ	2	2	
	エオ	15	1	
	カキ	43	1	
	クケ	19	1	
	コ	5	2	
	サシ	16	1	
	スセソタ	1096	3	
	チ，ツ，テ，ト	0，9，1，7	3	
		第4問　自己採点小計	(16)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第5問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{5}$	1	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{3}{5}$	1	
	オ	1	2	
	$\frac{カ}{キ}$	$\frac{2}{5}$	2	
	ク	3	1	
	ケコ	10	2	
	サ	8	2	
	シ，スセ	2，50	1	
	ソタ	70	2	
	チ$\sqrt{ツ}$	$4\sqrt{2}$	2	
	第5問　自己採点小計		(16)	
第6問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{オ}{カ}$，$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}-\frac{k}{サ}$	$\frac{3}{4}-\frac{k}{2}$	1	
	$\frac{k}{シ}$	$\frac{k}{4}$	1	
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{3}{2}$	3	
	$\frac{ソ}{タ}$	$\frac{3}{8}$	2	
	$\frac{チ}{ツ}$，テ	$\frac{1}{4}$，5	3	
	$\frac{ト\sqrt{ナニ}}{ヌ}$	$\frac{5\sqrt{17}}{8}$	3	
	第6問　自己採点小計		(16)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第7問	ア	4	1	
	イ	4	1	
	ウ	2	2	
	エ	2	1	
	オ	6	1	
	$\frac{カキ}{ク}$	$\frac{-1}{6}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{1}{6}$	1	
	$\frac{サ}{シス}$	$\frac{1}{12}$	2	
	$\frac{セ}{ソタ}$	$\frac{5}{12}$	2	
	チツ	39	4	
	第7問　自己採点小計		(16)	
	自己採点合計		(100)	

（注）　第1問～第3問は必答。第4問～第7問のうちから3問選択。計6問を解答。

＜MEMO＞

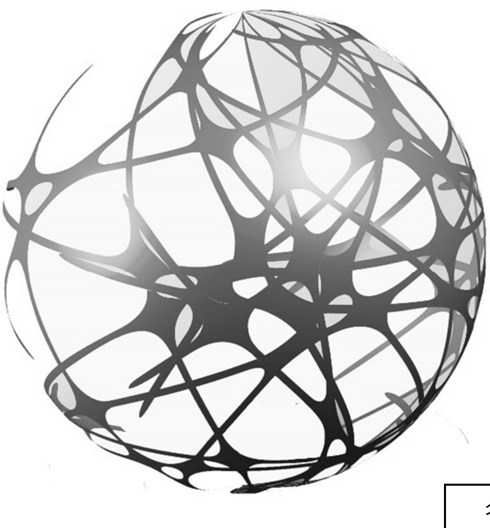
＜MEMO＞

Mathematics 数学

Forward 将来に

individual 個人

training 訓練



名　前